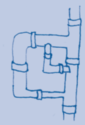
Astro-math

4

Jean-Marc Danel
Vinciane Demezel

Plantyn

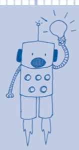
Chaque sujet est agrémenté de sigles :



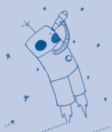
- Le **tuyau** :
  Il aiguille l'élève dans sa **recherche**.
  Il attire son attention sur les cas particuliers.
  Il propose des moyens faciles pour répondre aux questions.
  Il élargit son vocabulaire.

- La **fusée** :
  Elle offre la possibilité aux plus hardis **d'exercer leur capacité** sur des exercices plus « délicats » pendant que les moins téméraires effectuent leur travail de fixation en résolvant les exercices proposés.
  Elle permet à chaque catégorie d'élèves, des plus forts aux plus faibles, un **travail de haut rendement**.

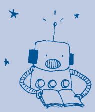
- L'**info-math** :
  Elle propose un bref rappel historique.
  Elle montre que les mathématiques s'étendent des plus anciennes civilisations aux plus récentes.
  Elle dévoile la mise en place des disciplines étudiant les propriétés des nombres, des figures géométriques, …



- Le **défi** :
  Il suscite un intérêt pour le chapitre étudié.
  Il invite l'élève à résoudre un problème simple.
  Il fait naître l'envie d'en savoir plus.



- L'**extension** :
  Elle présente des domaines où l'on peut observer les mêmes phénomènes.
  Elle confère une portée plus générale à la partie étudié.
  Elle ouvre de nouveaux horizons en développant certains points de la matière.

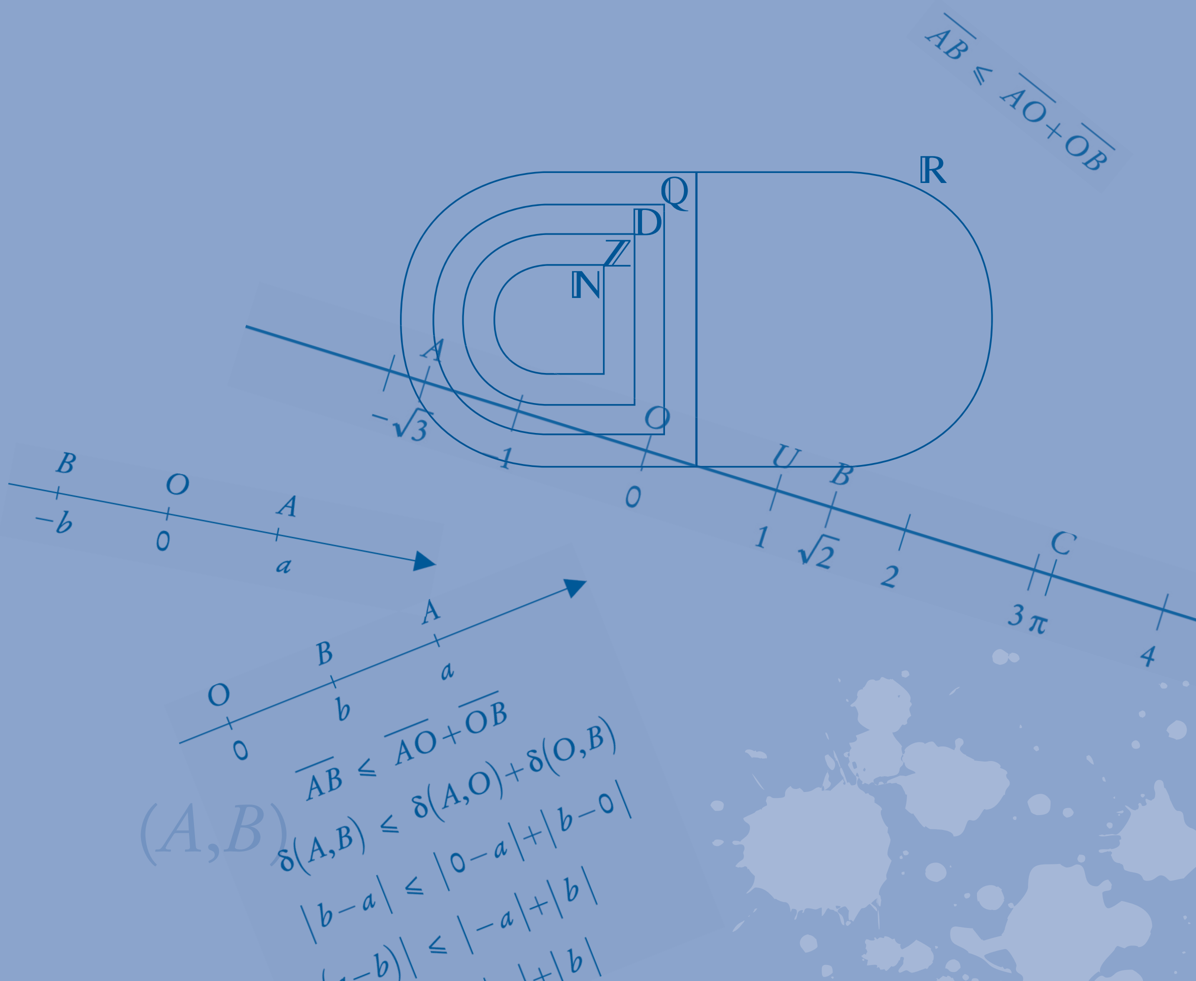


- Le **livre** :
  Il renvoie vers les exercices d'applications.

ISBN 978-2-8010-5556-4 • ASMA40L/002-01 • D2011/0120/114

Chapitre 1

Le calcul algébrique



Compétences

Expliciter des notions et des procédures

- ➤ Définir la « racine carrée positive d'un réel a » et l'utiliser à bon escient.
- ➤ Énoncer et appliquer les propriétés de la « racine carrée positive d'un réel a ».
- ➤ Démontrer les propriétés des racines carrées positives.
- ➤ Définir « racine d'indice n » et énoncer les propriétés pour justifier des propositions.
- ➤ Maîtriser les différents types de notations des puissances et radicaux.

Exploiter des procédures

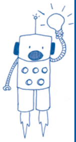
- ➤ Convertir des racines en exposants fractionnaires et inversement.
- ➤ Appliquer les propriétés des puissances et des racines d'indice n.
- ➤ Effectuer le calcul relatif aux puissances et aux racines à l'aide d'une calculatrice .
- ➤ Déterminer les conditions d'existence d'une expression algébrique.
- ➤ Résoudre des équations en terme de « puissances » et de « racines ».

Résoudre des problèmes

- ➤ Analyser une situation et organiser une démarche pour résoudre un problème.

Mission

L'étude de l'algèbre peut être comprise comme la généralisation des opérations employées en arithmétique. Une connaissance fondamentale et précise de l'arithmétique est indispensable avant de s'attaquer à l'algèbre. Les transformations des expressions littérales que tu as étudiées pendant les années inférieures vont te permettre de progresser et d'acquérir une maîtrise parfaite des techniques relatives au calcul algébrique.



1° Comment calculer $\sqrt{9+4\sqrt{2}}-\sqrt{12-8\sqrt{2}}$ sans calculatrice ?
2° L'inflation d'un pays est de 2% la première année, de 1,75% la deuxième année et de 2,2% la troisième année. Quelle est l'augmentation moyenne annuelle ?

1. Valeur absolue d'un nombre

1.1 Les propriétés

1° Calcule la valeur absolue des réels suivants :

$$4,\ -4,\ \frac{-1}{3},\ \sqrt{5},\ -\pi,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

2° Détermine, si possible, les réels dont la valeur absolue est

$$\sqrt{3},\ 6,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{-1}{2},\ 2\sqrt{3}.$$

1.2 La valeur absolue d'une somme ou d'une différence

x	y	$x+y$	$x-y$	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$	$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$
2	8							
–2	8							
2	–8							
–2	–8							

1° Complète le tableau ci-dessus et énonce les deux règles suggérées par le tableau.
Aide : Compare les trois dernières colonnes.
2° Démontre que tes observations sont toujours vraies.

1.3 La valeur absolue d'un produit

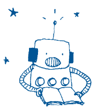
x	y	$x \cdot y$	$\lvert x \rvert$	$\lvert y \rvert$	$\lvert x \cdot y \rvert$	$\lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
2	8					
–2	8					
2	–8					
–2	–8					

Complète le tableau ci-dessus et énonce la règle suggérée par le tableau.

1.4 La valeur absolue d'un quotient

x	y	$\frac{x}{y}$	$\lvert x \rvert$	$\lvert y \rvert$	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert$	$\frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$
20	4					
–20	4					
20	–4					
–20	–4					

Complète le tableau ci-dessus et énonce la règle suggérée par le tableau.



Exercices 1 – 9

2. Les racines d'indices *n* et les puissances à exposants fractionnaires

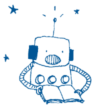
2.1 Les puissances à exposants entiers ou fractionnaires

1° À ta naissance, ton grand-père place une somme de 2000 € sur un compte nominatif à la banque. Tu pourras prendre cet argent à ta majorité (18 ans).
De quelle somme disposeras-tu alors ? (On suppose que l'intérêt moyen annuel est de 8 % et que les intérêts ne sont pas imposables.)

Formule à employer : $M = C(1+i)^n$ M est le nouveau montant, C est le capital de départ, i est l'intérêt et n le nombre d'années de placement.

2° Dans l'étude de mammifères, on a découvert une formule qui exprime la masse du cerveau en fonction de la masse de l'animal.

La formule est la suivante : $b = 0{,}01\, m^{\frac{7}{10}}$, où b est la masse du cerveau et m est la masse de l'animal en kilogramme.
Calcule la masse de ton cerveau et celle d'un hamster pesant 120 g.



Exercices 10 – 15

2.2 Les racines d'indice *n*

1° Complète le tableau suivant. Quelle conclusion peux-tu en tirer ?

x	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-6	0	$\frac{5}{7}$	$\sqrt{2}$	1	-12
$\lvert x \rvert$								
x^2								
$\sqrt{x^2}$								

2° Complète les tableaux suivants à l'aide de ta calculatrice et tire une conclusion.

x	0	-2	7	$\frac{-3}{4}$	-9	9	1
$\sqrt{x}$							
$\sqrt[3]{x}$							
$\sqrt[4]{x}$							
$\sqrt[7]{x}$							

x	0	–2	2	1	–1
$\sqrt[4]{x^3}$					
$\sqrt[6]{x^4}$					
$\sqrt[5]{x^3}$					
$\sqrt[3]{x^2}$					

3° À quelles conditions l'expression $\sqrt[n]{a^p}$ représente-t-elle un réel ?

2.3 Lien entre racine et exposant fractionnaire

1° Compare les réels suivants :

$\sqrt{5^6}$ et 5^3 ; $\sqrt[3]{2^9}$ et 2^3 ; $\sqrt[4]{2^{10}}$ et $2^{\frac{5}{2}}$; $\sqrt[5]{3^{15}}$ et 3^3.

2° Écris, avec un exposant fractionnaire, les réels suivants :

$\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[4]{5^6}$; $\sqrt[5]{3^5}$.

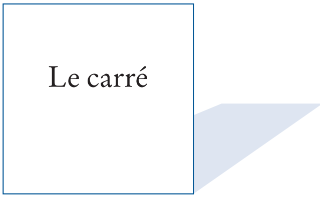
3° Écris, avec une racine et sans simplifier, les réels suivants :

$2^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{3}{4}}$; $3^{\frac{6}{5}}$; $7^{\frac{5}{9}}$.

Remarque : Lorsqu'une base est affectée d'un exposant fractionnaire, le dénominateur devient l'indice du radical et le numérateur devient l'exposant de la base (sous le radical).

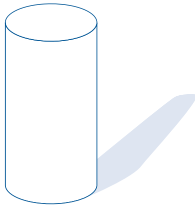
2.4 Applications

Calcule les longueurs demandées dans chaque paire de cas suivants :
Les côtés du carré et du cube, les rayons du cylindre et de la sphère.



$A_1 = 25 \text{ cm}^2$

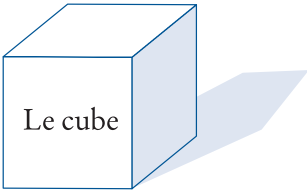
$A_2 = 8 \text{ cm}^2$



Le cylindre
$V = \pi r^2 h$
avec $h = 2$

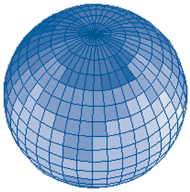
$V_1 = \pi \text{ cm}^3$

$V_2 = 9\pi \text{ cm}^3$



$V_1 = 64 \text{ cm}^3$

$V_2 = 128 \text{ cm}^3$



La boule
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_1 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$

$V_2 = 36\pi \text{ cm}^3$

En 1637, le mathématicien français **René Descartes** (1596–1650) crée la notation algébrique moderne, où les données (constantes) sont représentées par les premières lettres de l'alphabet (a, b, c,...) et les inconnues (variables) par les dernières (x, y, z), et introduit la notation exponentielle moderne pour les exposants positifs.

En 1656, le mathématicien anglais **John Wallis** (1616–1703) étend la notation exponentielle de Descartes à l'exposant négatif ou fractionnaire. Il introduit également le symbole de l'infini.

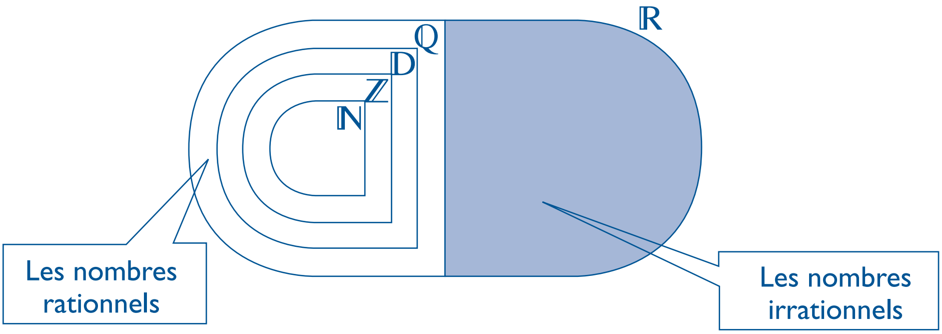
Exercices 16 – 43

NOTION

1. LES NOMBRES RÉELS

1.1 Les ensembles de nombres (rappel)

Tout nombre réel est un nombre rationnel ou un nombre irrationnel.

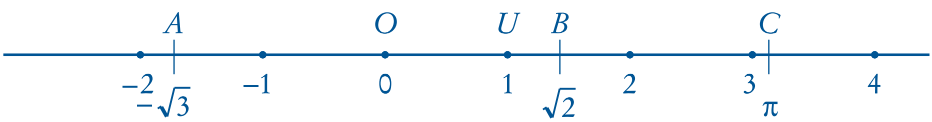


Remarque : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est une notation qui signifie «ensemble des réels auquel on enlève l'ensemble des rationnels». C'est donc l'ensemble des irrationnels.

1.2 La droite numérique (rappel)

On représente l'ensemble $\mathbb{R}$ par une droite graduée appelée droite numérique.

Tout point de la droite graduée d a pour abscisse un unique nombre réel. Tout nombre réel est l'abscisse d'un unique point de cette droite.



abs $A = -\sqrt{3}$; abs $B = \sqrt{2}$; abs $C = \pi$

- Mesure de $[AB]$:

  Si abs $A = x_A$ et si abs $B = x_B$: alors $\overline{AB} = |\, x_B - x_A \,|$.

  La distance entre deux réels égale la valeur absolue de leur différence.

- Opposé d'un nombre :
  L'opposé d'un réel est le produit de –1 par ce réel.
  L'opposé du réel a se note $-a$.
  La somme de deux réels opposés est nulle :
  $\forall\, a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 = -a + a.$

- Inverse d'un nombre :
  L'inverse d'un réel **non nul** est le quotient de 1 par ce réel.

  L'inverse du réel a se note a^{-1} ou $\frac{1}{a}$ $\left(a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$.

  Le produit de deux réels inverses égale 1 :
  $\forall\, a \in \mathbb{R}_0 : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a.$

1.3 La valeur absolue d'un nombre

1.3.1 Définition

La valeur absolue du réel a est la distance de O au point d'abscisse a sur la droite numérique.
$\forall\, a \in \mathbb{R} : |a| = \delta(0, a) = \delta(a, 0)$

La valeur absolue d'un réel est toujours positive.

1.3.2 Propriétés

Propriété 1 :

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{R}^+ \\ -a & \text{si } a \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Propriété 2 :

Deux réels opposés ont la même valeur absolue : $\forall\, a \in \mathbb{R} : |a| = |-a|$

En effet : les réels a et $-a$ sont situés à égale distance de 0.

Propriété 3 :

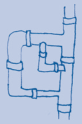
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}^{+} : \left| a \right| = r \Leftrightarrow a = r \text{ ou } a = -r$$

En effet : $\left| a \right| = r$ signifie que $\delta(0, a) = r$.

Or, les réels situés à une distance r de 0 sont r et $-r$. ■

Propriété 4 :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left| a \right| = \left| b \right| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$$



Cette propriété est utile dans la résolution de certains types d'équations. Elle est issue de la propriété 3.

Propriété 5 :

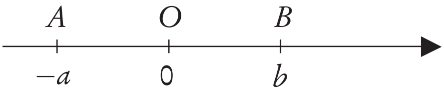
$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left| a + b \right| \leqslant \left| a \right| + \left| b \right| \quad \text{(Inégalité triangulaire)}$$

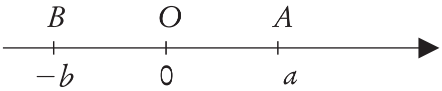
et

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left| a - b \right| \leqslant \left| a \right| + \left| b \right|$$

En effet :

Premier cas : O est entre A et B

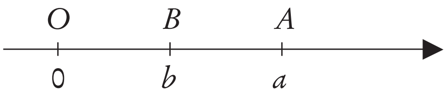


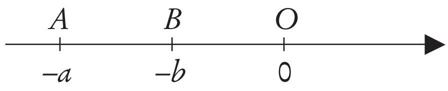


$$\begin{aligned} \overline{AB} &\leqslant \overline{AO} + \overline{OB} \\ \delta(A,B) &\leqslant \delta(A,O) + \delta(O,B) \\ \left| b - (-a) \right| &\leqslant \left| 0 - (-a) \right| + \left| b - 0 \right| \\ \left| b + a \right| &\leqslant \left| a \right| + \left| b \right| \\ \left| a + b \right| &\leqslant \left| a \right| + \left| b \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\leqslant \overline{AO} + \overline{OB} \\ \delta(A,B) &\leqslant \delta(A,O) + \delta(O,B) \\ \left| -b - a \right| &\leqslant \left| 0 - a \right| + \left| -b - 0 \right| \\ \left| -(a + b) \right| &\leqslant \left| -a \right| + \left| -b \right| \\ \left| a + b \right| &\leqslant \left| a \right| + \left| b \right| \end{aligned}$$

Deuxième cas : O n'est pas entre A et B





$$\begin{aligned}
\overline{AB} &\leqslant \overline{AO}+\overline{OB}\\
\delta(A,B) &\leqslant \delta(A,O)+\delta(O,B)\\
|b-a| &\leqslant |0-a|+|b-0|\\
|-(a-b)| &\leqslant |-a|+|b|\\
|a-b| &\leqslant |a|+|b|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &\leqslant \overline{AO}+\overline{OB}\\
\delta(A,B) &\leqslant \delta(A,O)+\delta(O,B)\\
|-b-(-a)| &\leqslant |0-(-a)|+|-b-0|\\
|a-b| &\leqslant |a|+|-b|\\
|a-b| &\leqslant |a|+|b|
\end{aligned}$$

■

Propriété 6 :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Cette propriété peut être facilement démontrée à l'aide des racines carrées quand le lien entre la racine carrée et la valeur absolue sera établi.

Propriété 7 :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0 : \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Cette propriété peut être facilement démontrée à l'aide des racines carrées quand le lien entre la racine carrée et la valeur absolue sera établi.

1.4 Les puissances à exposants entiers (rappel)

1.4.1 Définition

La n^e puissance d'un nombre réel a est égale au produit de n facteurs égaux à a.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$$

1.4.2 Propriétés

Propriété 1 : *Produit de puissance d'un même nombre*

> **Le produit de plusieurs puissances d'un même réel non nul** égale la puissance de ce réel ayant pour exposant **la somme des exposants.**
>
> $\forall\, a \in \mathbb{R}_0, \forall\, m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Propriété 2 : *Puissance d'une puissance d'un nombre*

> **Une puissance d'une puissance d'un réel** égale la puissance de ce nombre ayant pour exposant le **produit des puissances.**
>
> $\forall\, a \in \mathbb{R}_0, \forall\, m, n \in \mathbb{Z} : \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Propriété 3 : *Puissance d'un produit de plusieurs nombres*

> **La n^e puissance d'un produit** de plusieurs réels non nuls égale **le produit des n^e puissances** de ces réels.
>
> $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_0, \forall\, n \in \mathbb{Z} : \left(a \cdot b \cdot c\right)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

Propriété 4 : *Puissance d'un quotient de deux nombres*

> **La n^e puissance d'un quotient de deux réels non nuls** égale le **quotient des n^e puissances** de ces réels.
>
> $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_0, \forall\, n \in \mathbb{Z} : \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Propriété 5 : *Quotient de deux puissances d'un même nombre*

> **Le quotient de deux puissances d'un même réel non nul** égale la puissance de ce réel ayant pour exposant la **différence des exposants.**
>
> $\forall\, a \in \mathbb{R}_0, \forall\, m, n \in \mathbb{Z} : \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Propriété 6 : *Inverse d'une puissance d'un nombre*

> **L'inverse de la n^e puissance d'un réel non nul** égale **la n^e puissance de l'inverse de ce nombre.**
>
> $\forall\, a \in \mathbb{R}_0, \forall\, n \in \mathbb{Z} : \left(a^n\right)^{-1} = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

2. Les radicaux

2.1 Les racines carrées

2.1.1 Définition

Le nombre réel positif b est **une racine carrée** du nombre réel positif a si et seulement si $b^2 = a$.

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{a} = b \;\Leftrightarrow\; b^2 = a$

2.1.2 Notations et vocabulaire

1° La **racine carrée positive de** a se note $\sqrt{a}$, la **racine carrée négative de** a se note $-\sqrt{a}$ et a est appelé le **radicand** ($\forall\, a \in \mathbb{R}^+$).

2° $\sqrt{a}$ se lit également **racine d'indice 2 de** a ou **radical** a ($\forall\, a \in \mathbb{R}^+$).

2.1.3 Propriétés

Rappel : Le carré d'un nombre est toujours positif.

1° Aucun réel strictement négatif n'admet de racine carrée.
2° $\sqrt{0} = 0$
3° Tout réel strictement positif admet deux racines carrées opposées.

2.1.4 Opérations sur les radicaux

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

En effet :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \quad \text{(commutativité de la multiplication des réels)} \\ &= a \cdot b \quad \text{(définition } \sqrt{a}\text{)}\end{aligned}$$

avec $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ un réel positif (car il s'agit du produit de deux réels positifs).

Donc, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ est la racine carrée positive de ab.

■

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

En effet :

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} \qquad \text{(produit de 2 fractions)}$$

$$= \frac{a}{b} \qquad \text{(définition radical)}$$

avec $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ un réel positif (car il s'agit du quotient de deux réels positifs);

Donc, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est la racine carrée positive de $\frac{a}{b}$. ■

$$\forall a \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

En effet :

$(|a|)^2 = a^2$ avec $|a|$ un réel positif (définition de la valeur absolue).

Donc, le réel $|a|$ est la racine carrée positive de a^2. ■

2.2 Racines cubiques

2.2.1 Définitions

Le nombre réel b est **la racine cubique** du nombre réel a si et seulement si $b^3 = a$.

$\forall a, b \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

2.2.2 Notations et vocabulaire

1° La **racine cubique de *a*** se note $\sqrt[3]{a}$ et a est appelé le **radicand** ($\forall a \in \mathbb{R}$).

2° $\sqrt[3]{a}$ se lit également **racine d'indice 3 de *a*** (ou **radical d'indice 3**) où 3 est **l'indice** ($\forall a \in \mathbb{R}$).

2.2.3 Propriétés

Rappel : Un nombre et le cube de celui-ci ont toujours le même signe.

1° $\sqrt[3]{0} = 0$

2° Tout réel admet une seule racine cubique.

2.2.4 Opérations sur les racines cubiques

$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

En effet :

$$\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}\right)$$ (commutativité de la multiplication des réels)

$$= a \cdot b$$ (définition racine cubique)

Donc, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ est la racine cubique de ab. ■

$\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}_0 : \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

En effet :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}}$$ (produit de fractions)

$$= \frac{a}{b}$$ (définition racine cubique)

Donc, $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ est la racine cubique de $\dfrac{a}{b}$. ■

$\forall\, a \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{a^3} = a$

En effet :

$$(a)^3 = a^3$$

Donc, le réel a est la racine cubique de a^3. ■

2.3 Généralisation : les racines d'indice *n* ($n \in \mathbb{N}_0$)

2.3.1 Définitions

Le nombre b est **une racine nième** du nombre réel a si et seulement si **$b^n = a$**.

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair} : \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \\ \text{si } n \text{ est impair} : \forall a, b \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

2.3.2 Notations et vocabulaire

1° La **racine nième de *a*** se note $\sqrt[n]{a}$ et a est appelé le **radicand**
($\forall\, a \in \mathbb{R}^+$ si n est pair et $\forall\, a \in \mathbb{R}$ si n est impair).

2° $\sqrt[n]{a}$ se lit également **racine d'indice *n* de *a*** (ou radical d'indice n) où n est l'indice
($\forall\, a \in \mathbb{R}^+$ si n est pair et $\forall\, a \in \mathbb{R}$ si n est impair).

2.3.3 Propriétés (admises)

1° Les propriétés des racines carrées sont valables pour toutes racines d'indice pair.

2° Les propriétés des racines cubiques sont valables pour toutes racines d'indice impair.

Autrement dit :

Si n est pair,
- La nième puissance d'un nombre réel est un nombre réel positif.
- Aucun réel strictement négatif n'admet de racine nième.
- $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Tout réel strictement positif admet deux racines nièmes opposées.

Si n est impair,
- La nième puissance d'un nombre réel possède le même signe que ce nombre réel.
- $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Tout nombre réel admet une seule racine nième.

2.3.4 Opérations sur les racines nièmes

Ces opérations sont similaires aux opérations sur les racines carrées et les racines cubiques.

Si n est pair,

- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R}^+, \forall\, b \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{a^n} = |\, a \,|$

Si n est impair,

- $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}_0 : \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{a^n} = a$

Remarques :
D'autres opérations existent et pourront être démontrées facilement grâce aux exposants fractionnaires (pour autant que les radicaux suivants existent) :

- $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

2.4 Formes simplifiées d'un radical

Un radical est sous forme simplifiée si :

✓ Le radicand ne contient aucun facteur premier dont l'exposant est supérieur ou égal à l'indice du radical.
✓ L'indice et une puissance d'un facteur premier quelconque du radicand sont premiers entre eux.
✓ Le radicand n'est pas une fraction.
✓ Le dénominateur ne contient aucun radical.

Exemples :

1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ (définition des exposants fractionnaires)

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ (quotient de puissances d'un même nombre)

$=a^{\frac{1}{6}}$

$=\sqrt[6]{a}$ (définition des exposants fractionnaires)

2) $\sqrt[3]{5a^2}+\sqrt[6]{25a^4}=\left(5a^2\right)^{\frac{1}{3}}+\left(25a^4\right)^{\frac{1}{6}}$

$=5^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}+5^{\frac{2}{6}}\cdot a^{\frac{2}{3}}$

$=2\cdot\left(5^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)$

$=2\sqrt[3]{5a^2}$

2.5 Applications théoriques

La **moyenne géométrique** de n nombres positifs non nuls est la racine n^e^ du produit de ces nombres.

$\forall\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0^+ : MG=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$

Exemple :
La population d'une ville s'accroît de 7 % la première année, de 3 % la deuxième année et baisse de 2 % la troisième année.
Le taux d'accroissement annuel moyen sur les trois années est 2,6 % car
$\sqrt[3]{1{,}07\cdot 1{,}03\cdot 0{,}98}=1{,}026\ldots$

Le **taux d'accroissement moyen annuel** égale $\sqrt[n]{\dfrac{Q_t}{Q_i}}-1$, n étant le nombre d'années d'accroissement, Q_i les quantités initiales et Q_t les quantités finales.

Exemple :
La population du tiers monde était en 1982 d'environ 3,2 milliards d'individus. En 1995, cette population était de 5 milliards d'individus.
Le taux d'accroissement annuel moyen est de 3,5% car
$\sqrt[13]{\dfrac{5}{3{,}2}}-1=0{,}034925\ldots$

3. Puissance d'un réel positif à exposant fractionnaire

3.1 Définition

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Exemples :

$7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

$2^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

3.2 Propriétés

Les propriétés des puissances à exposants entiers restent valables pour les puissances à exposants fractionnaires.

4. Résolution d'une équation de type $x^n = a$

Méthode :

Pour déterminer la valeur de x, il suffit de déterminer la racine nième de a en distinguant le cas où n est pair et n est impair.

✓ Si n est pair, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ et donc l'équation initiale devient $|x| = \sqrt[n]{a}$ autrement dit x admet deux valeurs à savoir $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$.

✓ Si n est impair, $\sqrt[n]{x^n} = x$ et donc l'équation initiale devient $x = \sqrt[n]{a}$ autrement dit x admet une seule valeur à savoir $x = \sqrt[n]{a}$.

Exemples :

1) $x^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

   Donc $S = \{-2, 2\}$

2) $x^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-125} \Leftrightarrow x = -5$

   Donc $S = \{-5\}$

Résumé des formules étudiées

Mesure d'un segment sur une droite graduée :

Si abs $A = x_A$ et si abs $B = x_B$: alors $\overline{AB} = |x_B - x_A|$.

Valeur absolue :

1) $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

2) $|x| = |-x|$

3) $|x| = r \Leftrightarrow x = r \text{ ou } x = -r$

4) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

6) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

7) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

8) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Puissances : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

2) $\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$

3) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

4) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

6) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = \dfrac{y}{x}$

Radicaux :

1) $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$ avec $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \text{ si } n \text{ est pair} \\ x \in \mathbb{R} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2) $x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$

3) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

4) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

5) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

6) $x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

7) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| \text{ si } n \text{ est pair} \\ x \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

8) $\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$

9) $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$

10) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

Moyenne géométrique de plusieurs réels positifs non nuls :

$\forall\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0^+ : MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$, n est le nombre de facteurs.

Le taux d'accroissement moyen annuel connaissant les quantités finales et initiales :

$\sqrt[n]{\dfrac{Q_t}{Q_i}} - 1$, n étant le nombre d'années d'accroissement, Q_i les quantités initiales et Q_t les quantités finales

Applications

1. Un point M d'une droite graduée a a pour abscisse le réel x. Les points A, B et C de cette droite graduée ont respectivement pour abscisses les réels 3, –3 et 5.
Traduis chacune des phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue et place sur la droite les points M correspondants (trace une droite graduée par question) :
a) La distance entre les points B et M vaut 5.
b) La distance entre les points B et M est inférieure à 1.
c) La distance entre les points A et M vaut 7.
d) La distance entre les points C et M vaut 3 et la distance entre les points M et A est inférieure à 2.

2. Calcule :

a) $|0| =$ e) $|3-\pi| =$ i) $|-2^6| =$ m) $|2\pi-3\pi| =$

b) $|10^{-2}| =$ f) $|-2\sqrt{6}| =$ j) $\left|\left(\frac{-5}{2}\right)^3\right| =$ n) $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right| =$

c) $|-\pi-2| =$ g) $|7^{-1}| =$ k) $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right| =$ o) $|\sqrt{98}-10| =$

d) $|-1^{-2}| =$ h) $|-1+\sqrt{2}| =$ l) $|0{,}333-\sqrt{3}| =$ p) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| =$

3. Calcule la valeur numérique des expressions suivantes si $x = -2$.

a) $|2x-1| =$ b) $|-x-2| =$ c) $|x+3| =$ d) $|-3x+5| =$

4. Lors d'un cross scolaire, il y a une différence de 8 minutes entre le temps de Clémence et celui de Sylvie. Si Sylvie a passé la ligne d'arrivée à 14 h 25, à quelle heure Clémence l'a-t-elle franchie ?
(Écris l'équation qui traduit le problème.)

5. Montre que $|\sqrt{5}-5|+|\sqrt{5}+5|$ est un entier. Justifie.

6. Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Si vrai, justifie par une propriété ou une démonstration, si faux donne un contre-exemple.
a) La valeur absolue de la somme de 2 nombres quelconques est la somme des valeurs absolues de ces 2 nombres.
b) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $|a| < b$, alors $a < b$.

c) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $a < b$, alors $|\,a\,| < |\,b\,|$.
d) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $|\,a\,| < |\,b\,|$, alors $a < b$.
e) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$, $|\,a - b - c\,| \leqslant |\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|$.

7. Que signifient les expressions suivantes ?

a) $|x| < 1$ b) $|x-1| \leqslant 2$ c) $|x| > 4$ d) $|2x+3| \geqslant 4$

Représente dans chaque cas les solutions sur la droite des réels.

8. Soit l'expression suivante : $3|x-3| - |2x+1| = 0$.
Réécris cette expression sans valeurs absolues dans chacun des cas suivants :

a) si $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$,

b) si $-\dfrac{1}{2} < x < 3$,

c) si $x \geqslant 3$.

Déduis-en les valeurs de x qui vérifient cette expression.

9. Détermine les réels x vérifiant les égalités suivantes :

a) $|3x+4| = 5$ c) $|x+2| = |x-3|$
b) $|x-7| = 5$ d) $|x+5| + |x-4| = 0$

10. Sans utiliser la calculatrice, choisis la bonne réponse :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
3^{-2}	-9	$0{,}03$	$\dfrac{1}{9}$
$0{,}00017$	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7 \cdot 10^{5}$	$17 \cdot 10^{-4}$
$\left(2 \cdot 5^2\right)^3$	$2 \cdot 5^5$	$2^3 \cdot 5^6$	$2^3 \cdot 5^2$
$\dfrac{3^5}{9}$	$3^5 - 3^2$	3^7	3^3
$(0{,}0005)^2 \cdot (30000)^3$	$5^2 \cdot 3^3 \cdot 10^{-7}$	$5^2 \cdot 3^3 \cdot 10^{7}$	$5^2 \cdot 3^3 \cdot 10^{8}$

11. Si $x = 3$ et $y = –2$, calcule :

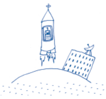
a) $x^3 =$ f) $y^2 =$ k) $x^2y^3 =$ p) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$

b) $-x^3 =$ g) $-y^2 =$ l) $x^3 + y^2 =$ q) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-3} =$

c) $(-x)^3 =$ h) $(-y)^2 =$ m) $(x-y)^2 =$ r) $\left(\frac{x}{-y}\right)^4 =$

d) $x^{-3} =$ i) $y^{-2} =$ n) $x^2 - y^2 =$ s) $\left(\frac{x^{-1}}{y}\right)^2 =$

e) $(-x)^{-3} =$ j) $(-y)^{-2} =$ o) $(x+y)^{-2} =$ t) $\left(\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}\right)^3 =$



12. Refais l'exercice précédent avec $x = 10^{-3}$ et $y = -10^{-2}$.

13. Supposons que 3 millions de contribuables doivent payer 450 € d'impôts par an. Écris sous forme d'une puissance de 10 la somme que l'État perçoit.

14. Quelle est la longueur parcourue par la lumière en une journée, en une semaine et en une année de 365 jours sachant que la lumière parcourt $3 \cdot 10^8$ m chaque seconde ?
Exprime tes résultats en notation scientifique.

15. L'explosion d'une bombe H de 100 mégatonnes libère une énergie d'environ 10^{18} joules, alors qu'une éruption solaire produit une énergie moyenne de 10^{24} joules.
Combien de bombes H de 100 mégatonnes faut-il pour obtenir l'équivalent d'énergie d'une éruption solaire ? (Hiroshima : 20 kilotonnes)

16. Simplifie les radicaux suivants :

a) $\sqrt{16} =$ f) $\sqrt[3]{8} =$ k) $\sqrt[3]{32} =$

b) $\sqrt{18} =$ g) $\sqrt[3]{64} =$ l) $\sqrt[3]{216} =$

c) $\sqrt{27} =$ h) $\sqrt[3]{125} =$ m) $\sqrt[3]{48} =$

d) $\sqrt{48} =$ i) $\sqrt[3]{250} =$ n) $\sqrt[3]{144} =$

e) $\sqrt{100} =$ j) $\sqrt[3]{54} =$ o) $\sqrt[3]{75} =$

17. Rends rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{20}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-1}$ d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$

18. Soit $x \in \mathbb{R}_0^+$, écris et simplifie les expressions suivantes à l'aide d'un exposant rationnel positif.

a) $\sqrt{x}$ d) $\sqrt[4]{x^8}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ j) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}}$

b) $\sqrt[7]{x}$ e) $\sqrt[3]{x^7}$ h) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$ k) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{x^5}$ f) $\sqrt[8]{x^2}$ i) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ l) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

19. Soit $x \in \mathbb{R}_0^+$, m et $n \in \mathbb{N}_0$. Écris et simplifie les expressions suivantes à l'aide d'un exposant rationnel positif.

a) $\sqrt[m]{x^n}$ d) $\sqrt[2n]{x^4}$ g) $\dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt{x^n}}$ j) $\sqrt[12m]{\dfrac{x^{8n}}{x^{9n}}}$

b) $\sqrt[3]{x^{2n}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ h) $\dfrac{\sqrt[3m]{x^n}}{\sqrt[8m]{x^{2n}}}$ k) $\sqrt[m]{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt[3m]{x^{6n}}$ f) $\dfrac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{x^0}}$ i) $\sqrt{\dfrac{x^{2m}}{x^{4n}}}$ l) $\sqrt[m]{\sqrt{x^n}}$

20. Soit $x \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Écris sous la forme d'un radical.

a) $x^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}}$ g) $x^{\frac{1}{m}}$ j) $x^{-\frac{2n}{6m}}$

b) $x^{\frac{3}{4}}$ e) $x^{-\frac{1}{4}}$ h) $x^{\frac{n}{m}}$ k) $x^{\frac{0}{m}}$

c) $x^{\frac{7}{2}}$ f) $x^{-\frac{2}{3}}$ i) $x^{-\frac{1}{m}}$ l) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}}$

Chapitre 1 Le calcul algébrique

21. Calcule sans machine :

Série 1

a) $4^{\frac{1}{2}} =$ d) $1^{\frac{3}{5}} =$ g) $(-8)^{\frac{1}{3}} =$ j) $25^{-\frac{1}{2}} =$

b) $125^{\frac{1}{3}} =$ e) $27^{-\frac{1}{3}} =$ h) $32^{-\frac{2}{5}} =$ k) $100^{-1{,}5} =$

c) $0^{\frac{1}{5}} =$ f) $4^{\frac{1}{4}} =$ i) $36^{\frac{3}{2}} =$ l) $32^{0{,}2} =$

Série 2

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} =$ d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{5}{2}} =$ g) $(-1000)^{-\frac{1}{3}} =$ j) $(0{,}0625)^{-\frac{1}{4}} =$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} =$ e) $(-81)^{\frac{1}{4}} =$ h) $(0{,}01)^{-\frac{3}{2}} =$ k) $100000^{-0{,}4} =$

c) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ f) $\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{3}} =$ i) $625^{-0{,}5} =$ l) $(-0{,}01024)^{\frac{1}{5}} =$

Série 3

a) $\sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt{3} =$ e) $\sqrt[5]{-160} \cdot \sqrt[5]{625} =$ i) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{81} =$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4^5} =$ f) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64} =$ j) $\sqrt[3]{\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{147}-\sqrt{75}}} =$

c) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} =$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[6]{3^{-2}}} =$ k) $\sqrt[5]{9} - \sqrt{3} \cdot \sqrt[10]{3^{-1}} =$

d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{625} =$ h) $\dfrac{\sqrt[3]{3^{-1}}}{\sqrt[3]{9}} =$ l) $\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{27^{-1}}} =$

Série 4

a) $\sqrt{12^2 + 16^2} =$ e) $\sqrt[3]{3^3 + 4^3} =$ i) $\sqrt[3]{(-21)^{-6}} =$

b) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$ f) $\sqrt[3]{-125 \cdot 10^9} =$ j) $\sqrt[3]{61 + \sqrt[3]{25 + \sqrt[3]{8}}} =$

c) $\sqrt[3]{0{,}000729} =$ g) $\sqrt{3^2 + \sqrt{49}} =$ k) $\sqrt{5\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{5\sqrt{2} + 1} =$

d) $\sqrt[4]{256^{-1}} =$ h) $\sqrt[3]{4^3 - 9^2} =$ l) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} =$

22. À l'aide de ta calculatrice, calcule (résultat en notation scientifique, précision 10^{-2}) :

a) $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt{7}} =$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{2^5}} =$

c) $\sqrt[5]{25^2 \cdot (-3)^2} =$

d) $\sqrt[3]{7^3 + 5^3} =$

e) $\sqrt[3]{6^5 - 5^2} =$

f) $\sqrt{\dfrac{5^3}{3^2}} =$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{9^4}{-6^2}} =$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{31}} =$

i) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{51}}{3^3}} =$

j) $\sqrt[6]{(-24)^2} \cdot \sqrt[3]{-24^5} =$

k) $\left(\dfrac{-47^3 \cdot 21^2}{\pi \cdot \sqrt{0,9}}\right)^3 =$

l) $\left(\dfrac{\sqrt[5]{19^3} \cdot \sqrt{0,2}}{-\sqrt[3]{6,5}}\right)^2 =$

23. Simplifie les radicaux suivants ($x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$) :

a) $\sqrt{x^2} =$

b) $\sqrt{x^2 y} =$

c) $\sqrt{x^3 y^2} =$

d) $\sqrt{16xy^2} =$

e) $\sqrt{25x^4 y^2} =$

f) $\sqrt{72x^5} =$

g) $\sqrt{98xy^5} =$

h) $\sqrt{192x^6 y^3} =$

i) $\sqrt{200x^5 y^2} =$

j) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}} =$

k) $\sqrt{\dfrac{x^5}{y^4}} =$

l) $\sqrt{\dfrac{x^4 y^3 z}{z^5}} =$

m) $\sqrt{\dfrac{25x^3}{y^2}} =$

n) $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt{16x} =$

o) $\sqrt{x^4 y} + \sqrt{64x^4 y} - x^2\sqrt{100y} =$

p) $\sqrt{x^5} + x\sqrt{16x^2 y} + \sqrt{144x^5 y} =$

24. Simplifie les radicaux suivants ($x, y \in \mathbb{R}_0$) :

a) $\sqrt{x^2} =$

b) $\sqrt{x^2 y^4} =$

c) $\sqrt{16x^6 y^2} =$

d) $\sqrt{25x^4 y^8} =$

e) $\sqrt{56x^6} =$

f) $\sqrt{98x^2 y^{100}} =$

g) $\sqrt{300y^2} =$

h) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}} =$

i) $\dfrac{\sqrt{x^4}}{x^2} =$

j) $\sqrt{\dfrac{(7x^3)^2}{y^2}} =$

k) $\sqrt{\left(\dfrac{2x}{y^3}\right)^2} =$

l) $\sqrt{\left(\dfrac{9x^2}{y^4}\right)^2} =$

25. Réduis les expressions suivantes et énonce les conditions d'existence si nécessaire :

a) $\sqrt[8]{x^9} =$ e) $\sqrt[6]{192x^3y^{60}} =$ i) $\dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} =$ m) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} =$

b) $\sqrt[4]{x^3y^5} =$ f) $\sqrt[5]{729x^5} =$ j) $\dfrac{xy}{\sqrt[3]{250x^7y^9}} =$ n) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x^3}} =$

c) $\sqrt[3]{54x^6y^5} =$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{147x^3}} =$ k) $\dfrac{15x^5y}{\sqrt[3]{135x^{10}y^4}} =$ o) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

d) $\sqrt[7]{512x^{10}y^{24}} =$ h) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{8x^4}} =$ l) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{64x^6}} =$ p) $\dfrac{x}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}} =$

26. Soit $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. À quelles conditions les expressions suivantes désignent-elles un réel ?

a) $\sqrt{x}$ e) $\sqrt[7]{-5^n}$ i) $\sqrt[m]{x^3}$ m) $\sqrt[m]{x^{-1}}$

b) $\sqrt[3]{x}$ f) $\sqrt{x^{-2}}$ j) $\sqrt[2m]{-x}$ n) $\sqrt[m]{x^{-2n}}$

c) $\sqrt[m]{-2}$ g) $\sqrt[7]{(-x)^n}$ k) $\sqrt[2m]{x^n}$ o) $\sqrt[m]{(-x)^n}$

d) $\sqrt[4]{(-3)^n}$ h) $\sqrt[m]{x^2}$ l) $\sqrt[3m]{x^n}$ p) $\sqrt[m]{-x^n}$

27. Calcule sans machine :

a) $\dfrac{25\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} =$ d) $\sqrt[2]{7^3}\cdot 49^{\frac{-1}{4}} =$ g) $\dfrac{\left(10^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}}{10^{\frac{4}{5}}} =$

b) $125^{\frac{4}{3}}\cdot\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^3 =$ e) $\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}} =$ h) $\dfrac{21^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}} =$

c) $8^{\frac{4}{3}}+4^{\frac{1}{2}} =$ f) $\left(4^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} =$

28. Simplifie les expressions suivantes $(x, y \in \mathbb{R}_0^+)$:

a) $(2x)^2 \cdot \left(3\sqrt{x}\right)^4$

d) $\dfrac{\left(x^3y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}}$

g) $\sqrt[8]{\dfrac{x^{16}y^{24}}{2^8}} \cdot (xy)^{-1}$

b) $\sqrt[3]{y^4} \cdot \sqrt{xy^2}$

e) $\sqrt[6]{xy} \cdot \sqrt[3]{xy^2}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt{y}\right)^3}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

c) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{5}}}\right)^{-2}$

f) $\sqrt[4]{81x^2y^2} \cdot \sqrt{121x^3y}$

29. Quel nombre est le plus grand : $\left(\sqrt[4]{16}\right)^{100}$ ou $\left(\sqrt{16}\right)^{25}$? Justifie !

30. Justifie les égalités suivantes :

a) $\dfrac{2}{3\sqrt{3}-5} = 5+3\sqrt{3}$

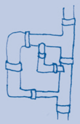
d) $\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{6}-2$

b) $\sqrt[3]{\left(1+9x^2-6x\right)^{-1}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(1-3x)}\right)^2}$

e*) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

c) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} = 3-\sqrt{5}$

f*) $3+\sqrt{2} = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$



Démontre que :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad \text{avec } C = \sqrt{A^2-B}$$

31. Démontre que $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$:

a) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

c) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

d) $\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$

32. Un carré est inscrit dans un cercle.

a) Détermine l'aire du carré si le rayon du cercle est *r*.

b) L'aire du carré et l'aire du cercle sont-elles proportionnelles ?
Si oui, détermine la constante de proportionnalité.

33. Calcule le rapport du volume d'une sphère et de son aire si le rayon de la sphère mesure 8,1 cm.

> *Volume de la sphère :* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *u.v. et*
>
> *Aire de la sphère :* $A = 4\pi r^2$ *u.a.*

34. Jean a complètement rempli un ballon de forme sphérique avec 36 litres d'eau.
Quel est le rayon, en cm, de son ballon ?

35. Quels sont les 2 entiers positifs entre lesquels le produit de $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)$, $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)$ et de $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)$ se situe ? Justifie !

36. Calcule la somme suivante :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}.$$

> *Démontre que*
>
> $\forall\, n \in \mathbb{N}$, l'inverse de $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ est $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

37. Complète la propriété suivante :
«Une fraction admet une racine carrée exacte à condition que le produit de ses termes soit ... .»

38. Résous les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $x^3 = -64$	d) $x^4 - 125x = 0$	g) $x^4 - 0{,}0625 = 0$	j) $\sqrt{x^2+1} = 0$
b) $x^4 = 81$	e) $x^2 + 49 = 0$	h) $x^6 = 16^{-3}$	k) $\sqrt[3]{x^2-9} = 0$
c) $64x^3 = 1$	f) $x^3 + 27 = 0$	i) $x^6 - 64 = 0$	l) $\sqrt{x^2+2} = 2$

39. Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'expression $36 + x^2$ soit un carré parfait ?

40. Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

41. Résous $\left(\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{x}\right)^{2}=625.$

42. La banque offre une possibilité de placement et prévoit pour la première année un intérêt de 3% et pour la deuxième année, un intérêt de 7%. Au même moment, une banque concurrente offre un intérêt constant de 5% pour les 2 ans. À quelle banque confieras-tu ton capital pour obtenir le meilleur taux de placement ?

43. Le nombre d'employés d'une entreprise était en 1990 de 200 personnes. En 2004, ce nombre est passé à 350 personnes. Quel est le taux d'accroissement annuel moyen de cette entreprise ?